2. Klausur zur Vorlesung
Theoretische Grundlagen der Informatik
Wintersemester 2024/2025

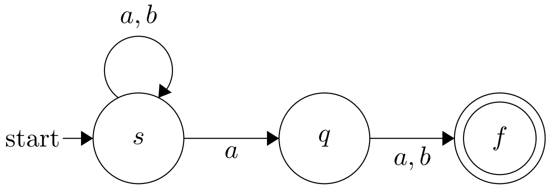
Vorname:	____________________
Nachname:	____________________
Matrikelnummer:	____________________

- Schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer auf das Deckblatt. Beschriften Sie jedes Aufgabenblatt mit Ihrer Matrikelnummer.
- Schreiben Sie die Lösungen auf die Aufgabenblätter und Rückseiten. Am Ende der Klausur sind zusätzliche Leerseiten. Fordern Sie zusätzliches Papier bitte nur an, wenn nötig.
- Die Tackernadel darf nicht gelöst werden, Sie dürfen allerdings die NP-vollständigen Probleme im Anhang abtrennen.
- Begründen/Beweisen Sie Ihre Antworten ausreichend, wenn "Zeigen/Beweisen Sie, dass" gefordert wird.
- $\mathbb{N}_0$ bezeichnet die natürlichen Zahlen inklusive 0, $\mathbb{N}$ die natürlichen Zahlen ohne 0.
- Als Hilfsmittel ist ein handbeschriebenes A4-Papier erlaubt.
- Einlesezeit: 15 min
  Bearbeitungszeit: 2 h

	Mögliche Punkte					Erreichte Punkte				
	a	b	c	d	Σ	a	b	c	d	Σ
Aufg. 1	2	4	4	–	10					
Aufg. 2	3	2	3	1	9					
Aufg. 3	1	2	4	2	9					
Aufg. 4	2	2	6	–	10					
Aufg. 5	2	2	4	4	12					
Aufg. 6	1	2	5	2	10					
Σ					60					

Problem 1: Warmup — $2 + 4 + 4 = 10$ Punkte

Gegeben sei der folgende NEA $\mathcal{A}$ über $\Sigma = \{a, b\}$:



(a) Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der $L(\mathcal{A})$ beschreibt.

(b) Geben Sie einen DEA an, der die Sprache $(L(A))^C$ akzeptiert. Die Übergangsfunktion des DEAs $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ soll total definiert sein.

(c) Seien r_1, r_2 beliebige reguläre Ausdrücke. Geben Sie einen Algorithmus an, der entscheidet, ob es ein Wort $w \in \Sigma^*$ gibt, sodass $w \in L(r_1)^C \cap L(r_2)^C$.

Problem 2: Kontextfreie Sprachen 3+2+3+1 = 9 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass die Sprache $L_1 := \{c^{2n}b^{3n} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ nicht regulär ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Sprache L_1 kontextfrei ist, indem Sie eine kontextfreie Grammatik G angeben, die L_1 akzeptiert.

(c) Betrachten Sie die folgende kontextfreie Grammatik $G = (\{S, T, U, A, B, C\}, \{a, b, c\}, S, R)$ in Chomsky-Normalform mit den folgenden Regeln R:

$$
\begin{aligned}
&S \to TS \mid CT \mid a \\
&T \to AU \mid TT \mid c \\
&U \to SB \mid AB \\
&A \to a \\
&B \to b \\
&C \to c
\end{aligned}
$$

Geben Sie an, ob das Wort *ccaab* zur Sprache $\mathcal{L}(G)$ gehört. Wenden Sie hierzu den CYK-Algorithmus an. Benutzen Sie die unten gegebene Tabelle.

V_{i5}					
V_{i4}					
V_{i3}					
V_{i2}					
V_{i1}					
	c	c	a	a	b

(d) Welche Bedingung muss für ein Nichtterminal T gelten, damit $T \in V_{ij}$ im CYK-Algorithmus?
Hier bezeichnet V_{ij} wie in der Vorlesung die Zelle in der i-ten Spalte und der j-ten Zeile, nummeriert wie in der Tabelle.

Problem 3: Approximationsalgorithmen $1 + 2 + 4 + 2 = 9$ Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir das Problem 3-Hitting Set.

> 3-Hitting Set
> **Gegeben:** Eine Grundmenge M und Teilmengen $A_1, \ldots, A_n \subseteq M$, mit $|A_i| \leqslant 3$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.
> **Problem:** Berechne eine Menge $Z \subseteq M$ mit minimaler Kardinalität, sodass für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $Z \cap A_i \neq \emptyset$.

(a) Gegeben der folgenden Instanz von 3-Hitting Set über der Grundmenge $\{1, \ldots, 8\}$. Geben Sie eine optimale Lösung an.

$$A_1 = \{2, 4, 5\} \qquad A_2 = \{1, 2, 5\} \qquad A_3 = \{1, 3, 8\}$$
$$A_4 = \{1, 4, 7\} \qquad A_5 = \{4, 6, 7\} \qquad A_6 = \{4, 5, 8\}$$

Wir geben den folgenden Algorithmus an:

Algorithmus $\boldsymbol{\mathcal{A}}$: Greedy 3-Hitting Set

Input: $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ mit $|A_i| \leqslant 3$.

```
Z ← ∅
while ∃i : Z ∩ A_i = ∅ do
    Z ← Z ∪ A_i
return Z
```

(b) Zeigen Sie, dass Algorithmus $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ ein korrekter Approximationsalgorithmus für 3-Hitting Set ist.

(c) Zeigen Sie, dass Algorithmus $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ eine Approximation mit relativer Gütegarantie 3 erreicht.

(d) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Instanz $I_n = (M, A_1, \ldots, A_n)$ von 3-Hitting Set an, sodass ein minimales 3-Hitting Set Größe OPT hat und $\boldsymbol{\mathcal{A}}(I_n) = 3 \cdot OPT$ gilt.

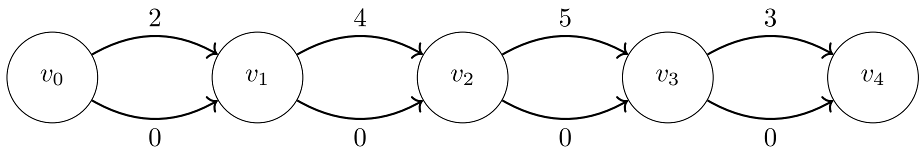
Problem 4: NP-Vollständigkeit $\qquad 2 + 2 + 6 = 10$ Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir *gewichtete Multigraphen*.

Ein gewichteter Multigraph ist ein Graph $G = (V, E, c)$, bei dem zwei Knoten u und v mit mehr als einer Kante verbunden werden können, wobei jede Kante $e \in E$ dabei ein Gewicht $c(e) \in \mathbb{N}_0$ hat. Das Gewicht eines Pfades $P = e_1, \dots, e_n$ ist gegeben durch $c(P) = \sum_{e \in P} c(e)$.

> GEWICHTETE MULTIGRAPH ERREICHBARKEIT
> **Gegeben:** Ein gerichteter, gewichteter Mutigraph $G = (V, E, c)$ und eine natürliche Zahl $t \in \mathbb{N}_0$ sowie zwei Knoten $u, v \in V$.
> **Problem:** Gibt es einen Pfad von u nach v in G mit Gewicht genau t?

(a) Betrachten Sie den folgenden gewichteten Multigraphen G:



Geben Sie für die folgenden Eingaben an, ob es sich um eine Ja oder Nein-Instanz handelt:

$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{t})$	**Ja/Nein-Instanz**
$(v_0, v_4, 7)$	
$(v_2, v_3, 2)$	
$(v_0, v_3, 2)$	
$(v_4, v_1, 12)$	

(b) Zeigen Sie, dass GEWICHTETE MULTIGRAPH ERREICHBARKEIT $\in$ NP gilt.

(c) Zeigen Sie, dass GEWICHTETE MULTIGRAPH ERREICHBARKEIT NP-schwer ist. Reduzieren Sie hierzu von einem der NP-vollständigen Probleme im Anhang.
Tipp: Betrachten Sie den Graphen aus Aufgabenteil a)

Problem 5: Zeige oder Widerlege $2 + 2 + 4 + 4 = 12$ Punkte

(a) Jeder reguläre Sprache ist in NP.

Kreuzen Sie an: ☐ Ich zeige die Aussage. ☐ Ich widerlege die Aussage.

(b) Wenn $L_1 \cup L_2$ kontextfrei ist, dann ist mindestens eine der Sprachen L_1 oder L_2 bereits kontextfrei.

Kreuzen Sie an: ☐ Ich zeige die Aussage. ☐ Ich widerlege die Aussage.

(c) Sei $L \subseteq \{0,1\}^*$ eine Sprache, sodass L semi-entscheidbar und L^C nicht semi-entscheidbar ist. Die Sprache

$$L' = \{0w \mid w \in L\} \cup \{1w \mid w \notin L\}$$

ist semi-entscheidbar.

Kreuzen Sie an: ☐ Ich zeige die Aussage. ☐ Ich widerlege die Aussage.

(d) Seien $L_1, \ldots, L_k \subseteq \Sigma^*$ semi-entscheidbar. Außerdem gelte, dass die Sprachen L_i eine Partition von Σ^* bilden. Das heißt, die Sprachen L_i sind paarweise disjunkt, also für $i < j$ gilt $L_i \cap L_j = \emptyset$ und $\bigcup_{i=1}^{k} L_i = \Sigma^*$.

Es gilt, dass jede Sprache L_i für $i \in \{1, \ldots, k\}$ entscheidbar ist.

Kreuzen Sie an: ☐ Ich zeige die Aussage. ☐ Ich widerlege die Aussage.

Problem 6: Abgeschlossenheit 1+2+5+2 = 10 Punkte

Sei Σ ein festes endliches Alphabet. Ein Wort $w = a_1 \dots a_n$ ist eine Teilfolge von $v = b_1 \dots b_m$, falls es Indizes $1 \leqslant i_1 < i_2 \dots < i_n \leqslant m$ gibt, sodass $a_j = b_{i_j}$ für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$. Zum Beispiel ist *abac* eine Teilfolge von *adbdadc*. Wir schreiben $w \preccurlyeq v$ falls w eine Teilfolge von v ist.

(a) Gegeben seien folgende Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie an, welche Wörter keine Teilfolge eines anderen gegebenen Wortes sind. In anderen Worten: geben Sie alle Wörter w an, sodass es kein $w' \neq w$ gibt mit $w \preccurlyeq w'$.

acbacb bcccbbb ccacbba cab cbabac

(b) Der Aufwärtsabschluss von einer Sprache L ist definiert als $\uparrow L := \{w \in \Sigma^* \mid \exists v \in L : v \preccurlyeq w\}$. Der Abwärtsabschluss von einer Sprache L ist definiert als $\downarrow L := \{w \in \Sigma^* \mid \exists v \in L : w \preccurlyeq v\}$.

Geben Sie für die Sprache $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ jeweils den Aufwärts- und Abwärtsabschluss an.

(c) Eine Sprache L über dem Alphabet Σ heißt *aufwärts abgeschlossen*, wenn

$$\forall\, v \in L,\ \forall\, w \in \Sigma^* : v \preccurlyeq w \implies w \in L.$$

Zeigen Sie, dass jede aufwärts abgeschlossene Sprache regulär ist.
Sie dürfen folgendes Resultat ohne Beweis benutzen:

Higman's Lemma: Für jede unendliche Folge an Wörtern $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ über einem endlichen Alphabet Σ, gibt es je zwei Indizes $i < j$, sodass $w_i \preccurlyeq w_j$ gilt.

(d) Eine Sprache L über dem Alphabet Σ heißt *abwärts abgeschlossen*, wenn

$$\forall\, v \in L,\ \forall\, w \in \Sigma^* : w \preccurlyeq v \implies w \in L.$$

Zeigen Sie, dass jede abwärts abgeschlossene Sprache regulär ist.

Die folgenden Probleme können Sie als NP-vollständig annehmen und für Reduktionen verwenden.

CLIQUE
Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k < |V|$.
Problem: Gibt es eine Clique der Größe mindestens k?

SUBSET SUM
Gegeben: Zahlen $a_1 \dots a_n \in \mathbb{N}$, und Wert $t \in \mathbb{N}$.
Problem: Gibt es $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, sodass $\sum_{i \in I} a_i = t$?

HAMILTON-KREIS
Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.
Problem: Gibt es einen Kreis in G, der jeden Knoten genau einmal besucht?

3-COLOR
Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.
Problem: Gibt es eine Funktion $c : V \to \{1, 2, 3\}$, sodass für jede Kante $\{u, v\}$ gilt $c(u) \neq c(v)$?

PARTITION
Gegeben: Zahlen $a_1 \dots a_n \in \mathbb{N}$.
Problem: Gibt es $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, sodass $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \notin I} a_j$?

3-SAT
Gegeben: Menge U an aussagenlogischen Variablen und eine Menge C von Klauseln mit genau drei Literalen.
Problem: Gibt es eine Wahrheitsbelegung der Variablen aus U, sodass alle Klauseln aus C erfüllt sind?

SAT
Gegeben: Menge U an aussagenlogischen Variablen und eine Menge C von Klauseln.
Problem: Gibt es eine Wahrheitsbelegung der Variablen aus U, sodass alle Klauseln aus C erfüllt sind?

SET COVER
Gegeben: Eine Grundmenge M, Teilmengen $U_1, \dots, U_m \subseteq M$ mit $\bigcup_{i=1}^m U_i = M$, sowie eine Zahl c.
Problem: Gibt es eine Indexmenge $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ mit $|I| \leqslant c$ und $\bigcup_{i \in I} U_i = M$?

DOMINATING SET
Gegeben: Ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl k.
Gesucht: Eine Teilmenge $D \subseteq V$, sodass $|D| \leqslant k$ und für alle Knoten $v \in V$ gilt $v \in D$ oder v hat einen Nachbarn $u \in D$, also $\{u, v\} \in E$.